REND. SEM. MAT.
UNIV. POLITEC. TORINO
FASC. SPEC. CONTROL THEORY

Michel Fliess

ESQUISSES POUR UNE THEORIE DES SYSTEMES NON LINEAIRES EN TEMPS DISCRET

Abstract. *We show how many natural aspects of discrete-time non-linear systems can be taken into account by difference algebra: definition of the input-output behavior, realization and state, feedback synthesis. This theory permits us to rediscover a striking parallel with continuous-time systems when studied with differential algebra. The relationship with algebraic geometry allows us to tackle again and generalize some points of a previous approach made by E.D. Sontag.*

Introduction

Cette communication a pour but de jeter les fondations d'une théorie des systèmes non linéaires en temps discret à partir de l'algèbre aux différences. Rappelons qu'en 1985 l'auteur [7, 11] a pu résoudre, grâce à l'algèbre différentielle, l'épineux problème de l'inversion des systèmes non linéaires multivariables en temps continu, et a, ainsi, proposé une nouvelle approche du bouclage dynamique [8, 10]. Algèbres différentielle et aux différences, que J.F. Ritt a introduites voilà plus de cinquante ans, constituent pour les équations différentielles et aux différences un corps de doctrine ayant pour ambition d'offrir les mêmes services que l'algèbre commutative pour les équations algébriques. Il apparaît aujourd'hui que ces outils devraient permettre une reformulation totale de l'automatique non linéaire qui, en continu, avait suivi ces dernières années les chemins de la géométrie différentielle (voir le livre d'Isidori [19] et les actes [13] d'une récente conférence à Paris) et dont certains aspects avaient été repris en discret (Jakubczyk et Normand-Cyrot [21], Monaco et Normand-Cyrot [26], Grizzle [14]).

Pour nous, le comportement entrée-sortie est donné par une collection d'équations aux différences, qui s'interprètent par l'analogue aux différences de la notion d'extension algébrique de corps (cf. Cohn [3]). On en déduit immédiatement un critère de réalisation déjà énoncé par Sontag [30] et la solution du problème d'inversion droite ou gauche. Le concept d'état, tel qu'il s'est imposé depuis la "révolution kalmanienne" [22], subit une modification profonde pour les raisons suivantes, dont la méconnaissance explique bien des déboires actuels, en continu comme en discret:

— L'écriture $q(t+1) = F(q(t), u(t))$, où q est l'état, suppose *a priori* l'équation reliant état et commande résolue globalement. Quoique cette situation se rencontre souvent, en mécanique par exemple, il existe des domaines, comme les circuits électriques non linéaires (cf. Hasler et Neirynck [18]), où ce n'est point le cas.

— On ne peut définir l'état indépendamment de la commande, opinion déjà exprimée en continu par Willems [32] et van der Schaft [28], qui la traduisent dans le langage des variétés différentiables fibrées.

— L'utilisation des variétés différentiables en continu, et reprise en discret (Jakubczyk [20], Jakubczyk et Normand-Cyrot [21], Grizzle [14]), ne convient guère à la définition de singularités pour l'application entrée-sortie.

Un état sera, ici, quelque-chose de voisin d'une base de transcendance d'une extension du corps aux différences des commandes, contenant les sorties. On construit ainsi une forme canonique d'observabilité, pendant de celle de Zeitz [33] en continu. Quant à l'espace d'état, ce sera un schéma affine, au sens d'A. Grothendieck, mais sur le corps aux différences des commandes et non, comme Sontag [30], sur le corps de base, $\mathbb{R}$ par exemple.

Le bouclage enfin, sans doute l'idée la plus fondamentale de l'automatique, apparaît dans sa version dynamique comme l'analogue aux différences de la notion bien connue de correspondance algébrique. En guise d'illustrations, nous reprenons notre solution du problème de la commande non interactive [10] et traitons de la linéarisation exacte par retour de sortie pour laquelle nous exprimons la condition la plus faible possible.

Les éléments de ce travail sont repris, sans grand changement, d'une Note [12] sur les systèmes continus et l'algèbre différentielle. La généralisation commune des algèbres différentielle et aux différences, telle qu'on la trouve chez Bialynicki-Birula [1] et Cohn [4], permettra d'englober les systèmes à retards et l'échantillonnage.

1. - Rudiments d'algèbre aux différences[1]

Un *anneau aux différences* A est un anneau commutatif unifère, avec un monomorphisme, appelé transformation, $\delta : A \to A$. Les relations suivantes sont donc vérifiées:

$$a, b \in A \qquad \begin{aligned} &\delta(a+b) = \delta a + \delta b\,, \\ &\delta(ab) = \delta a \ \delta b\,, \\ &\delta a = 0 \iff a = 0. \end{aligned}$$

On obtient des notations analogues à celles de l'algèbre différentielle en posant, pour tout entier $\nu \geqslant 0$, $a^{(\nu)} = \delta^{\nu} a \ (a^{(o)} = a)$. Un morphisme $\varphi : A \to B$ d'anneaux aux différences munis de transformations δ et ϵ, est un morphisme d'anneaux tel que $\varphi\delta = \epsilon\varphi$. Les termes usuels comme idéaux, corps, ... auxquels on accole les mots "aux différences", ont des significations claires.

Soit K un corps aux différences. On note $K\{x\}$, où $x = (x_1, \ldots, x_m)$ est un m-uplet de variables aux différences, l'anneau des polynômes aux différences, c'est-à-dire la limite inductive des anneaux de polynômes $K[x^{(s)} \,|\, s \leqslant \nu]$. Le corps quotient de $K\{x\}$ est un corps aux différences noté $K\langle x\rangle$.

Soient K et L deux corps aux différences tels que $K \subset L$. Comme en algèbre classique, deux situations sont possibles:

- Tout élément de L vérifie une équation aux différences à coefficients dans K. On dit alors que L est une extension *transformellement algébrique* de K.
- Il existe au moins un élément de L ne satisfaisant aucune équation aux différences à coefficients dans K. On dit alors que L est une extension *transformellement transcendante* de K. Le nombre maximum de tels éléments, qui sont indépendants, est un entier fondamental appelé *degré de transcendance transformelle* de L par rapport à K.

L'anneau aux différences A étant donné, en peut définir un sur-anneau aux différences B, unique à un isomorphisme près, dit *clôture inversive* de A, tel que, pour tout $b \in B$,

- $b^{(r)} \in A$, pour un entier $r \geqslant 0$,
- $b^{(-1)} = \delta^{-1}(b)$ est défini.

---

[1] Voir l'excellente monographie de Cohn [3].

Dans le contexte des systèmes, la transformation est un retard et, par conséquent, la clôture inversive contient les avances.

II. - Définition des systèmes

Soient k un corps aux différences, supposé, pour simplifier, de caractéristique nulle, $u=(u_1, \ldots, u_m)$, $y=(y_1, \ldots, y_p)$ deux ensembles finis de variables aux différences.

Définition II.1 - Un système avec u et y comme signaux d'entrée et de sortie équivaut à la donnée du corps aux différences $k\langle u, y\rangle$ comme extension transformellement algébrique du corps aux différences $k\langle u\rangle$.

Il existe donc des équations polynômiales, à coefficients dans k, reliant les $u_i(t-\alpha)$ et les $y_j(t-\beta)$ $(i=1, \ldots, m; j=1, \ldots, p; \alpha, \beta \geqslant 0)$. Sans entrer dans des détails mathématiques, trop longs pour être développés ici, nous supposons qu'à ces équations correspond un idéal aux différences *premier*, ce qui permet d'utiliser le formalisme de la théorie des corps. Une telle hypothèse se justifie si l'on veut que la réponse aux entrées soit, en quelque sorte, bien déterminée.

L'exemple $y(t-1)=u(t)$, $m=p=1$, montre que la *causalité* n'est pas nécessairement respectée. Rappelons que l'*ordre* (resp. l'*ordre effectif* (cf. [3])) de $k\langle u, y\rangle$ par rapport à $k\langle u\rangle$ est le degré de transcendance de $k\langle u, y\rangle$ par rapport à $k\langle u\rangle$ (resp. de la clôture inversive de $k\langle u, y\rangle$ par rapport à celle de $k\langle u\rangle$). Comme $k\langle u, y\rangle$ est transformellement algébrique sur $k\langle u\rangle$, ces deux ordres sont finis, le second étant inférieur ou égal au premier. Voici, sans démonstration, une caractérisation de la causalité, supposée, par la suite, toujours vérifiée:

Théorème II.2 - Il y a causalité si, et seulement si, l'ordre et l'ordre effectif de $k\langle u, y\rangle$ par rapport a $k\langle u\rangle$ sont égaux.

Remarque. - En discret et en continu, la donnée d'un comportement entrée-sortie se fait souvent par séries de Volterra ou génératrices (voir, par exemple, la thèse de Normand-Cyrot [27] et sa bibliographie). Quoique courant chez les ingénieurs, ce point de vue est passablement irréaliste: une telle série dépend en général d'une infinité de paramètres que l'on ne peut déterminer. Notre approche est, quant à elle, finitiste.

Soit Ω le $k\langle u, y\rangle$-espace vectoriel des différentielles de $k\langle u, y\rangle$ sur

$k\langle u\rangle$ (cf. Hartshorne [17]). Sa dimension égale le degré de transcendance de $k\langle u, y\rangle$ par rapport à $k\langle u\rangle$. On retrouve, dans un cadre modifié, la critère jacobien de Sontag [30].

Proposition II.3. - La dimension de Ω est finie.

Bien que nous n'ayons pas encore abordé le problème général de la réalisation, il convient de conclure ce paragraphe en montrant que notre définition comprend la description usuelle par espace d'état:

$$(1) \qquad \begin{cases} q(t+1) = F(q(t), u(t)) \\ y(t) = h(q(t), u(t)) \end{cases}$$

Les composantes de l'état $q = (q_1, \ldots, q_r)$ sont aussi des variables aux différences. Pour simplifier, nous supposerons que celles de F et h sont des fonctions rationnelles de leurs arguments.

Proposition II.4. - En (1), les composantes $y_1, \ldots, y_p$ de la sortie sont transformellement algébriques sur $k\langle u\rangle$.

Démonstration. - Il suffit de monter que $q_1, \ldots, q_r$ sont transformellement algébriques sur $k\langle u\rangle$. D'après la dynamique, les différentielles, au sens précédent, de $q_1(t), \ldots, q_r(t)$ par rapport à $k\langle u\rangle$ s'expriment a fonction de celles de $q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1)$ et donc, de proche en proche, de $q_1(0)$, ..., $q_r(0)$. On aboutit ainsi à un espace vectoriel de dimension finie pour les différentielles, ce qui équivaut à un degré de transcendance fini et, donc, à l'algébricité transformelle. ∎

III. - Inversion et mise en série

En linéaire, les méthodes fréquentielles fournissent des réponses immédiates à l'inversion et à la mise en serie. L'inversion, droite ou gauche, d'un système linéaire constant se traduit par l'inversibilité, droite ou gauche, de la matrice de transfert. Quant à la connexion en série, elle correspond au produit de ces matrices. En non-linéaire, discret ou continu, les méthodes actuelles sont impuissantes, sauf dans le cas élémentaire de l'inversion d'un système manovariable (cf. Monaco et Normand-Cyrot [24]). Tout s'éclaire avec l'algèbre aux différences (cf. [9]).

1) **Inversion**

Le degré de transcendance transformelle du corps aux différences $k\langle y\rangle$, engendré par la sortie, par rapport à k est un entier de la plus haute importance appelé *rang transformel de sortie* du système.

Théorème III.1. - Pour un système linéaire constant, le rang transformel de sortie n'est autre que le rang de la matrice de transfert.

Démonstration. - A tout système linéaire constant, correspond un idéal aux différences linéaire et homogène dans $k\{y\}$, c'est-à-dire un nombre fini d'équations linéaires homogènes aux différences en les variables $y_1, \dots, y_p$. Toute équation de ce type peut être interprétée comme une relation entre les lignes de la matrice de transfert, avec comme coefficients des fonctions de transfert rationnelles. La réciproque est facile où la conclusion. ∎

Proposition III.2. - Le rang transformel de sortie est inférieur ou égal à $\inf(m, p)$, où m et p désignent les dimensions de la commande et de la sortie.

Démonstration. - En effet, $k\langle y\rangle$ est engendré par p éléments $y_1, \dots, y_p$ qui sont transformellement algébriques sur $k\langle u\rangle$. ∎

Définition III.3. - Un système est dit *(transformellement) inversible à droite* (resp. *à gauche*), si, et seulement si, le rang transformel de sortie égale la dimension de la sortie (resp. de la commande).

Propriété III.4. - (i) Si le système est inversible à droite, il n'existe aucune équation aux différences, indépendante de la commande, reliant les composantes de la sortie.

(ii) Si le système est inversible à gauche, il est possible de récupérer la commande à partir de la sortie par un nombre fini d'équation aux différences.

Démonstration. - La première assertion n'est qu'une reformulation du fait que la degré de transcendance transformelle de $k\langle y\rangle$ par rapport à k vaut p. Quant à la seconde, elle découle de l'égalité bien connue suivante (cf. [3]), où d° transc. transf. désigne le degré de transcendance transformelle:

$$d^\circ \text{ transc. transf. } k\langle u, y\rangle / k = d^\circ \text{ transc. transf. } k\langle u, y\rangle / k\langle y\rangle$$
$$+ \, d^\circ \text{ transc. transf. } k\langle y\rangle / k .$$

Comme

$$d^\circ \text{ transc. transf. } k\langle y\rangle/k = m\,,$$

et, nécessairement,

$$d^\circ \text{ transc. transf. } k\langle u, y\rangle/k = m\,,$$

il vient

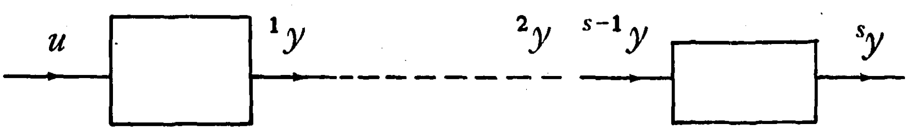
$$d^\circ \text{ transc. transf. } k\langle u, y\rangle/k\langle y\rangle = 0\,.$$

Cela signifie que $u_1, \ldots, u_m$ sont transformellement algébriques sur $k\langle y\rangle$ et fournit le système inverse à gauche. ■

Remarque. - Il serait instructif de comparer la somme des *zéros à l'infini,* tels qu'ils sont définis géométriquement par Grizzle et Nijmeijer [16], à notre rang transformel de sortie.

2) **Mise en série**

La figure suivante est bien connue



La sortie d'un système est l'entrée du suivant. La définition même des systèmes conduit à une *tour* d'extensions transformellement algébriques de corps:

$$k\langle u\rangle \subseteq k\langle u, {}^1y\rangle \subseteq \ldots \subseteq k\langle u, {}^1y, \ldots, {}^sy\rangle\,.$$

Il en résulte que les composantes de ${}^sy$ sont transformellement algébriques sur $k\langle u\rangle$.

Remarque. - Il y a une parenté évidente entre la decomposition en séries de systèmes et la théorie de Galois de extension transformellement algébriques de corps aux différences (cf. Bialynicki-Birula [1]), lien déjà noté pour la décomposition en cascaded [6].

IV - Réalisation

Sans revenir sur les critiques de l'introduction, rappelons qu'à la suite du linéaire (cf. Kalman, Falb et Arbib [22]), la représentation par espace d'état se fait en général comme en (1). Depuis son apparition en informatique, puis en automatique, l'état est, de façon imagée, "la quantité de mémoire à stocker" pour poursuivre les calculs. C'est pourquoi nous appellerons *(vecteur d')* *état* tout n-uplet $q=(q_1, \dots, q_n)$ de variables aux différences vérifiant les propriétés:

– $q_1^{(-1)}, \dots, q_n^{(-1)}$ sont (non transformellement) algébriques sur $k\langle u\rangle(q)$, c'est-à-dire sur le sur-corps (non aux différences) de $k\langle u\rangle$ engendré par $q_1, \dots, q_n$.

– Il existe un n-uplet $\nu=(\nu_1, \dots, \nu_n)$ d'entiers positifs ou nuls tel que $y_1, \dots, y_p$ soient (non transformellement) algébriques sur $k\langle u\rangle(q^{(\nu)})$.

Proposition IV.1 - La dimension de l'état est supérieure ou égale à l'ordre de $k\langle u, y\rangle$ par rapport à $k\langle u\rangle$.

Un état sera dit *réduit* ou *minimal* si sa dimension égale cet ordre.

Théorème IV.2 - Il existe un état réduit.

Démonstration. - Soit $\zeta=(\zeta_1, \dots, \zeta_\lambda)$ une base de transcendance de la clôture inversive de $k\langle u, y\rangle$ par rapport à celle de $k\langle u\rangle$. Les relations algébriques entre $\zeta^{(-1)}$ et ζ peuvent contenir des termes de la forme $u^{(-r)}$, $r\geqslant 2$. Pour les rendre causales, il suffit de poser $q^{(s)}=\zeta$, pour un certain entier $s\geqslant 0$. En résolvant les relations précédentes, résolution qui peuvent avoir uniquement une valeur locale, il vient

$$(2)\qquad \begin{cases} q(t+1)=F(q(t), u(t+1), u(t), \dots, u(t-\alpha)) \\ \\ y(t)=h(q(t-s), u(t), \dots, u(t-\alpha)) \end{cases}$$

Cette représentation n'a de sens que pour $t\geqslant \max(s, \alpha)$. ∎

Exemple. - Supposons, pour simplifier, $p=1$. Une base de transcendance de la clôture inversive de $k\langle u, y\rangle$ par rapport à celle de $k\langle u\rangle$ est fournie par $y, y^{(-1)}, \dots, y^{(1-d)}$. L'équation

$$\Phi(y^{(-d)}, y^{(-d+1)}, \dots, y, u^{(-d)}, \dots, u, u^{(1)}, \dots, u^{(\alpha)})=0$$

se résoud localement en

$$y^{(-d)} = \varphi(y^{(-d+1)}, \ldots, y, u^{(-d)}, \ldots, u, \ldots, u^{(\alpha)}) \ .$$

Posons $q_i(t+d) = y(t+d+i-1)$, $i = 1, \ldots, d$. Il vient

$$(3) \quad \begin{cases} q_1(t+d+1) = q_2(t+d) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{d-1}(t+d+1) = q_d(t+d) \\ q_d(t+d+1) = \varphi(q_d(t+d), \ldots, q_1(t+d), u(t+d+1), \ldots, u(t-\alpha)) \\ y(t+d) = q_1(t+d). \end{cases}$$

C'est l'analogue discret de la forme canonique d'observabilité introduite par Zeitzt [33] (voir aussi [12]).

Remarques. - (i) La possible validité locale des représentations (2) ou (3) est un fait essentiel qui, bien que rencontré en ingéniérie (cf. [18]), ne semble pas avoir été noté par les théoriciens.

(ii) Dans de prochaines publications, nous développerons ce qui tient lieu de *commandabilité* et d'*observabilité* et conduit à l'état réduit. D'ores et déjà, il apparaît qu'un tel état peut être *reconstruit* (cf. [22]) à partir de la commande et de la sortie.

Prendre des bases de transcendance distinctes confirme que l'état ne peut être défini indépendamment de la commande. L'*espace d'état* sera ainsi le *schéma affine* de l'anneau $k\langle u\rangle\{q\}$ (cf. [17]). Sontag [30] avait, quant à lui, considéré un schéma affine sur le corps de base k, donc sans y relier les commandes. Entre divers avantages, notre approche permettra d'analyser les singularités. Pour d'autres aspects, voir Sontag et Rouchaleau [31], Jakubczyk [20], Monaco et Normand-Cyrot [25], Schwartz et Dickinson [29].

V. - Synthèse par bouclage

Rappelons (cf. Dieudonné [5]) qu'une *correspondance* entre deux variétés algébriques V et W est une sous-variété algébrique de $V \times W$. Il est naturel de prendre pour définition de bouclage l'analogue aux différences de cette notion.

Soient $v = (v_1, \ldots, v_\mu)$ de nouvelles commandes, qui sont aussi des-variables aux différences.

Définition V.1. - Une loi de *bouclage* sur la sortie équivaut à la donnée d'un idéal aux différences de l'anneau aux différences $k\langle y\rangle\{u, v\}$.

En d'autres termes, un bouclage est déterminé par une collection (finie) d'équations aux dans $k\langle y\rangle\{u, v\}$. Si un état q est défini, une loi de bouclage sur l'état équivaut à un idéal aux différences de $k\langle q\rangle\{u, v\}$.

Deux exemples

1) *Découplage* (cf. [10])

Nous nous intéressons ici au *découplage*, ou *commande non interactive*, tel que la composante u_i de la commande influence, après une possible renumérotation, la seule composante y_i de la sortie $(m \leqslant p)$.

Proposition V.2 - Un système est découplable par bouclage sur la sortie si, et seulement si, il est transformellement inversible à droite.

Démonstration. - La nécessité étant claire, traitons de la suffisance en supposant le système inversible à droite. Toute composante y_i satisfait une équation

$$\Phi_i(y_i, \ldots, y_i^{(\alpha)}, u, \ldots, u^{(\beta)}) = 0 .$$

Posons $y_i = v_i^{(\gamma_i)}$. L'inversibilité à droite implique que les v_i sont des indeterminées aux différences indépendantes. La loi de bouclage est décrite par $\Phi_1, \ldots, \Phi_p$. ■

2) *Linéarisation par bouclage*

La linéarisation par bouclage est un sujet aujourd'hui très en vogue, que nous nous abstiendrons de définir exactement (voir Claude [2], Isidori [19] et leur bibliographie). En discret, la linéarisation par bouclage statique d'état a été étudiéee par Monaco et Normand-Cyrot [23] et par Grizzle [15].

Un système sera dit *effectif* ssi les composantes de la sortie sont toutes influencées par les commandes. Mathématiquement, cela signifie que $y_1, \ldots, y_p$, qui sont transformellement algébriques sur $k\langle u\rangle$, sont transformellement transcendantes sur k. Les composantes $y_1, \ldots, y_p$

peuvent satisfaire des équations aux différences indépendantes de la commande, équations qui s'interprètent comme un idéal aux différences de $k\{y\}$ (voir la démonstration du théorème III.1). C'est l'*idéal de sortie* du système. Il est dit *linéaire* ss'il est engendré par des polynômes linéaires. Voici la condition la plus faible possible pour obtenir la linéarisation:

Proposition V.3. - Un système effectif est linéarisable par bouclage sur la sortie si, et seulement si, son idéal de sortie est linéaire.

Démonstration. - La nécessité étant évidente, passons à la suffisance. Après une possible renumérotation, supposons que $y_1, \ldots, y_\pi$, $1 \leqslant \pi \leqslant p$, soit une base de transcendance transformelle de $k\langle y\rangle$ par rapport à k. Le calcul précédent du découplage conduit à π systèmes linéaires $y_i = v_i^{(\gamma_i)}$, $i = 1, \ldots, \pi$. La linéarité de $y_{\pi+1}, \ldots, y_p$ découle de la linéarité de l'idéal. ■

REFERENCES

[1] A. Bialynicki-Birula, *On Galois theory of fields with operators*, Amer. J. Math., 84, 1962, p. 89-109.

[2] D. Claude, *Everything you always wanted to known about linearization*, in [13], p. 181-226.

[3] R.M. Cohn, *Difference Algebra*, Interscience, New York, 1965 (Réimpression: Krieger, Huntington, NY, 1979).

[4] R.M. Cohn, *A difference-differential basis theorem*, Canad. J. Math., **22**, 1970, p. 1224-1237.

[5] J. Dieudonné, *Cours de géométrie algébrique*, t. 2, Presses Universitaires de France, Paris, 1974.

[6] M. Fliess, *Décomposition en cascade des systèmes automatiques et feuillatages invariants*, Bull. Soc. Math. France, **113**, 1985, p. 285-293.

[7] M. Fliess, *Some remarks on nonlinear invertibility and dynamic state-feedback*, in "Theory and Applications of Nonlinear Control Systems", MTNS-85, Stockholm, C.I. Byrnes and A. Lindquist eds, North-Holland, Amsterdam, 1986, p. 115-121.

[8] M. Fliess, *A new approach to the noninteracting control problem in nonlinear systems theory,* Proc. 23rd Allerton Conf., Monticello, IL, 1985, p. 123-129.

[9] M. Fliess, *L'inversion entrée-sortie comme illustration d'une algèbre nouvelle en non-linéaire,* Actes Coll. CNRS "Propriétés Structurelles des Systèmes Linéaires Multivariables. Application à des Problèmes de Commande", Paris, 1986.

[10] M. Fliess, *Vers une nouvelle théorie du bouclage dynamique sur la sortie des systèmes non linéaires,* in "Analysis and Optimization of Systems", Antibes, 1986, A. Bensoussan and J.L. Lions eds, Lect. Notes Control Inform. Sc. **83**, Springer, Berlin, 1986, p. 293-299.

[11] M. Fliess, *A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems,* Systems Control Lett., **8**, 1986.

[12] M. Fliess, *Nonlinear control theory and differential algebra,* Proc. Modelling Adaptive Control Conf., Sopron, Hungary, 1986, à paraître.

[13] M. Fliess et M. Hazewinkel, eds, *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory,* Proc. Conf. Paris, 1985, Reidel, Dordrecht, 1986.

[14] J.W Grizzle, *Local input-output decoupling of discrete-time nonlinear systems,* in [13], p. 431-439.

[15] J.W. Grizzle, *Feedback linearization of discrete-time systems,* in "Analysis and Optimization of Systems", Antibes, 1986, A. Bensoussan and J.L. Lions eds, Lect. Notes Control Inform. Sc. **83**, Springer, Berlin, 1986, p. 273-281.

[16] J.W. Grizzle et H. Nijmeijer, *Zeros at infinity for nonlinear discrete time systems,* Math. Systems Theory, **19**, 1986, p. 79-93.

[17] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Springer, New York, 1977.

[18] M. Hasler et J. Neirynck, *Circuits non linéaires,* Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1985.

[19] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems: An Introduction,* Lect. Notes Control Inform. Sc. **72**, Springer, Berlin, 1985.

[20] B. Jakubczyk, *Invertible realizations of nonlinear discrete-time systems,* Proc. Conf. Inform. Sc. Syst., Princeton, NJ, 1980, p. 235-239.

[21] B. Jakubczyk et D. Normand-Cyrot, *Orbites de pseudo-groupes de difféomorphismes et commandabilité des systèmes non linéaires en temps discret,* C.R. Acad. Sc. Paris, **I-298**, 1984, p. 257-260

[22] R.E. Kalman, P.L. Falb et M.A. Arbib, *Topics in Mathematical System Theory*, McGraw Hill, New York, 1969.

[23] S. Monaco et D. Normand-Cyrot, *The immersion under feedback of a multidimensional discrete-time nonlinear system into a linear system*, Internat. J. Control, **38**, 1983, p. 245-261.

[24] S. Monaco et D. Normand-Cyrot, *Some remarks on the invertibility of nonlinear discrete-time systems*, Proc. Amer. Control Conf., San Francisco, 1983.

[25] S. Monaco et D. Normand-Cyrot, *On the realization of nonlinear discrete-time systems*, Systems Control Lett., **5**, 1984, p. 145-152.

[26] S. Monaco et D. Normand-Cyrot, *Nonlinear systems in discrete time*, in [13], p. 411-430.

[27] D. Normand-Cyrot, *Théorie et pratique des systèmes non linéaires en temps discret*, Thèse d'Etat, Université Paris-Sud, Orsay, 1983.

[28] A.J. van der Schaft, *System theoretic description of physical systems*, CWI Tract 3, Centrum Wiskunde Informatica, Amsterdam, 1984.

[29] C.A. Schwartz et B.W. Dickinson, *On finite dimensional realization theory of discrete time nonlinear systems*, Systems Control Lett., **7**, 1986, p. 117-123.

[30] E.D. Sontag, *Polynomial Response Maps*, Lect. Notes Control Inform. Sc. **13**, Springer, Berlin, 1979.

[31] E.D. Sontag et Y. Rouchaleau, *On discrete-time polynomial systems*, Nonlinear Analysis, **1**, 1976, p. 55-64.

[32] J.C. Willems, *System theoretic models for the analysis of physical systems*, Ricerche Automatica, **10**, 1979, p. 71-106.

[33] M. Zeitz, *Observability canonical (phase-variable) form for non-linear time-variable systems*, Internat. J. Systems Sc., **15**, 1984, p. 949-958.

MICHEL FLIESS - Laboratoire des signaux & systemes - Ecole superieure d'electricite - Plateau de Moulon - 91190 Gif-sur-Yvette - Francia.